Izvestia VUZov SSSR
Radioelectronica

ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ
МВ и ССО СССР
РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК - copy

"Optimal Algorithm for Computing the two-dimensional discrete Fourier transform"

КИЕВ — 1986 - Kiev

УДК 517.443

ОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

А. М. ГРИГОРЯН

Предложен оптимальный по числу операций умножения, алгоритм вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье, с помощью построения определенной модификации соответствующего тензора третьего ранга фурье-спектра.

Рассмотрим произвольный массив $\{f_{n,k}\}$ дискретного сигнала, размеры которого для простоты изложения будем считать равными, т. е. $n,\ k=1\div N$ для некоторого целого числа N, равного степени 2.

В силу тензорного представления [1] фурье-спектра сигнала, каждая его составляющая в отсчете (p, s), где $p, s=1\div N$, которая есть с точностью до нормировочного множителя

$$F_{p,s}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f_{n,k}W^{np+ks}, \tag{1}$$

где $W=W_N=\exp(2\pi i/N)$, однозначно описывается соответствующим N-мерным вектором $\overline{F}_{p,s}=(f_{p,s,1},\ f_{p,s,2},\ \ldots,\ f_{p,s,N})$, для которого

$$F_{p,s}=\sum_{t=1}^{N} f_{p,s,t}W^{t}. \tag{2}$$

При этом каждая компонента $f_{p,s,t}$, где $p,\ s,\ t=1\div N$, тензора 3-го ранга $\{f_{p,s,t}\}$ определяется суммированием значений сигнала в отсчетах соответствующего множества:

$$V_{p,s,t}=\{(n,\ k);\ n,\ k=1\div N,\ np+ks=t \bmod N\}, \tag{3}$$

т. е.

$$f_{p,s,t}=\sum_{V_{p,s,t}} f_{n,k} \tag{4}$$

Но, так как для всех $t\in[1,\ N/2]$ имеет место $W^{t+N/2}=-W^{t}$, составляющую (1) в произвольном отсчете $(p,\ s)$ можно однозначно представить и соответствующим $N/2$-мерным вектором $\overline{F}'_{p,s}=(f'_{p,s,1},\ f'_{p,s,2},\ \ldots,\ f'_{p,s,N/2})$, составляющие которого вычисляются из составляющих соответствующего начального вектора $\overline{F}_{p,s}$ по формуле

$$f'_{p,s,t}=f_{p,s,t}-f_{p,s,t+N/2},\quad t=1\div N/2. \tag{5}$$

Такое представление каждой составляющей $F_{p,s}$ спектра в виде соответствующего $N/2$-мерного вектора $\overline{F}'_{p,s}$ назовем спаренным векторным, для отличия от начального векторного представления $\overline{F}_{p,s}$, а построенный тензор 3-го ранга $\{f'_{p,s,t};\ p,\ s=1\div N,\ t=1\div N/2\}$ спаренным тензором фурье-спектра.

Как и в случае начального тензорного представления спектра сигнала, когда для любых целых p, s и k имело место [1]

$$F_{\overline{kp},\overline{ks}}=\sum_{t=1}^{N} f_{p,s,t}W^{kt}, \tag{6}$$

где по определению $\overline{l}=l \bmod N$ для произвольного целого l, в случае спаренного тензорного представления для всех p, s и любых нечетных

k имеет место аналогичная формула

$$F_{\overline{kp},\overline{ks}} = \sum_{t=1}^{N/2} f'_{p,s,t} W^{kt}. \tag{7}$$

Действительно, так как $W^{kt} = -W^{k(t+N/2)}$ для всех нечетных k, из определения (5) и известного свойства (6) следует, что

$$\sum_{t=1}^{N/2} f'_{p,s,t} W^{kt} = \sum_{t=1}^{N/2} f_{p,s,t} W^{kt} - \sum_{t=1}^{N/2} f_{p,s,t+N/2} W^{kt} = \sum_{t=1}^{N} f_{p,s,t} W^{kt} = F_{\overline{kp},\overline{ks}}.$$

Пусть $k = 2m - 1$ для некоторого целого m. Тогда, раскрывая экспоненциальные множители в правой части (7), имеем

$$F_{\overline{(2m-1)p},\,\overline{(2m-1)s}} = \sum_{t=1}^{N/2} (f'_{p,s,t} W^{-t})\, W_{N/2}^{mt}. \tag{8}$$

Рассматривая полученную формулу (8) для всех значений $m = 1 \div N/2$, получаем, что выполнением $N/2$-точечного преобразования Фурье для каждого отсчета (p, s) спектра над вектором $\overline{G}_{p,s} = (f'_{p,s,1} W^{-1}, f'_{p,s,2} W^{-2}, \ldots$ $\ldots, f'_{p,s,N/2} W^{-N/2})$, определяются все значения спектра исходного сигнала в отсчетах, составляющих нечетную половину $T'_{p,s}$ соответствующей циклической группы с образующей (p, s)

$$T_{p,s} = \{(\overline{kp}, \overline{ks});\quad k = 1 \div N\}, \tag{9}$$

т. е.

$$T'_{p,s} = \{((\overline{2m-1)p}, \overline{(2m-1)s});\qquad m = 1 \div N/2\} \tag{10}$$

Например, для отсчета (1,1) преобразование Фурье одномерного вектора $\overline{G}_{1,1}$ определяет спектральные составляющие исходного двумерного сигнала в отсчетах (1,1), (3,3), (5,5), ..., $(N-1, N-1)$.

С помощью полученной формулы (8) построим эффективный алгоритм вычисления двумерного дискретного преобразования Фурье (ДДПФ). Как и в алгоритме [1], основанном на формуле вычисления (6), для этого, очевидно, нужно выбрать минимальное число исходных отсчетов, соответствующие множества (10) которых покрывали бы в совокупности всю область $X_N = \{n, k);\ n, k = 1 \div N\}$ определения спектра. В отличие от описанного в [1] алгоритма вычисления ДДПФ, для которого указывалось на невозможность оптимального покрытия области спектра группами (9), т. е. такого, чтобы выполнялось условие $X_N = \Sigma^{\cdot}\{T_{p,s};\ (p, s) \in J\}$, где знак $\Sigma^{\cdot}$ обозначает объединение непересекающихся множеств, для некоторого множества J из X_N, множества (10) это позволяют осуществить. Действительно, справедлива следующая лемма.

Лемма. Для произвольной степени двойки N существует множество из области определения спектра, удовлетворяющее условию ее оптимального покрытия

$$X_N = \sum_J{}^{\cdot}\, T'_{p,s}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть (p, s) произвольный элемент области X_N, и представим его в виде $(p, s) = 2^n l (p_0, s_0)$, где $n \in [0, \log_2 N]$, l — нечетное число, а p_0 и s_0 взаимно-простые числа. Ясно, что такое представление каждого элемента (p, s) единственно. Так как в силу этого представления одно из значений p_0, s_0, по крайней мере, должно быть нечетным, пусть таким является p_0. Тогда существует число k, для которого имеет место $(p_0, s_0) = \overline{p_0 (1, ks_0)}$. Легко проверить, что такое $k = \overline{p_0 s_0}$. При этом, если

нечетным является и s_0, то имеет место, очевидно, и равенство $(p_0, s_0) = \overline{s_0(kp_0, 1)}$ для этого же числа $k = \overline{p_0 s_0}$, которое в этом случае является нечетным. Поэтому для всех нечетных значений m имеет место

$$T'_{1,m} = T'_{m,1}. \tag{12}$$

Далее, так как $(p_0, s_0) = \overline{p_0(1, ks_0)}$, то $(p_0, s_0) \in T'_{1,ks_0}$, откуда следует, что для всех взаимно-простых чисел p_0, s_0

$$(p_0, s_0) \in \bigcup_{m=1}^{N} T'_{1,m} \cup \bigcup_{m=1}^{N/2} T'_{2m,1}$$

Следовательно, для рассматриваемого (p, s) имеем

$$(p, s) = 2^n l(p_0, s_0) \in 2^n \left\{\bigcup_{m=1}^{N} T'_{1,m} \cup \bigcup_{m=1}^{N/2} T'_{2m,1}\right\} = \bigcup_{m=1}^{N/2^n} T'_{2^n(1,m)} \cup \bigcup_{m=1}^{N/2^n+1} T'_{2^n(2m,1)}, \tag{13}$$

так как для всех $m = 1 \div N$ очевидны следующие равенства:

$$2^n T'_{1,m+N/2^n} = T'_{2^n(1,m)}, \quad 2^n T'_{2(m+N/2^n+1,1)} = T'_{2^n(2m,1)}.$$

Поэтому, из (13) получаем, что

$$X_N = \bigcup_{n=0}^{\log_2 N} \left\{\bigcup_{m=1}^{N/2^n} T'_{2^n(1,m)} \cup \bigcup_{m=1}^{N/2^n+1} T'_{2^n(2m,1)}\right\} = \bigcup_{J_{N,N}} T'_{p,s}, \tag{14}$$

где множество $J_{N,N}$, как это легко следует отсюда, есть

$$J_{N,N} = J_N \cup 2J_{N/2} \cup 4J_{N/4} \cup \ldots \cup NJ_1, \tag{15}$$

в котором множества $J_{N/2^n}$ для всех $n = 0 \div \log_2 N$ есть

$$J_{N/2^n} = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (1, N/2^n)\} \cup \{(2,1), (4,1), (6,1), \ldots, (N/2^n, 1)\}. \tag{16}$$

Таким образом, найденное множество (15) позволяет покрыть область определения спектра множествами вида (10) с образующими из нее.

Далее легко доказать, что множества (10) в (14) не пересекаются между собой. Действительно, пусть (p_1, s_1) и (p_2, s_2) произвольные разные элементы множества (15), а числа $n, m \in [0, \log_2 N]$ такие, что $(p_1, s_1) \in 2^n J_{N/2^n}$ и $(p_2, s_2) \in 2^m J_{N/2^m}$. Если предположить существование некоторого элемента (p, s) из пересечения множеств T'_{p_1,s_1} и T'_{p_2,s_2}, то легко получим для некоторых целых m_1 и m_2 систему равенств

$$\left.\begin{aligned}(2m_1 - 1)\, p_1 &= (2m_2 - 1)\, p_2 \bmod N\\ (2m_1 - 1)\, s_1 &= (2m_2 - 1)\, s_2 \bmod N\end{aligned}\right\}, \tag{17}$$

так как должно выполняться условие пересечения $(p, s) = \overline{(2m_1 - 1)(p_1, s_1)} = \overline{(2m_2 - 1)(p_2, s_2)}$. Ясно, что при $n \neq m$ система (17) не имеет решения, поэтому рассмотрим единственный возможный случай $n = m$. Но и в этом случае, перебирая все возможные, в силу построения множеств (16), варианты $p_1 = p_2 = 1$, $p_1 = s_2 = 1$, $p_2 = s_1 = 1$, $s_1 = s_2 = 1$, получим для всех их несовместимые с условием выбора элементов (p_1, s_1) и (p_2, s_2) решения системы (17): $(p_1, s_1) = (p_2, s_2)$. Таким образом, построенное множество (15) удовлетворяет условию леммы, что и доказывает ее справедливость.

Более того, если определить множества J и I из области X_N эквивалентными при ее покрытии, в случае выполнения равенств: $X'_J = X'_I = X_N$,

$\operatorname{card} J = \operatorname{card} I$, где card обозначает знак мощности множества, а множества: $X'_J = \bigcup\limits_J T'_{p,s}$, $X'_I = \bigcup\limits_I T'_{p,s}$, то, записывая все это в виде $J \sim I$, из доказательства приведенной леммы следует следующее утверждение.

Следствие. Всякое множество J из X_N, с помощью которого можно покрыть область определения спектра оптимальным образом (11) с минимальной для этого мощностью, эквивалентно множеству

$$J_{N,N} = \sum_{n=0}^{\log_2 N} {}^{\cdot} 2^n J_{N/2^n},$$

мощность которого $\operatorname{card} J_{N,N} = 3N - 2$.

Действительно, так как $\operatorname{card} J_{N/2^n} = 1{,}5\, N/2^n$ для всех $n = 0 \div \log_2 N$, а составляющие объединение (15) множества (16) являются непересекаемыми, то легко получаем, что

$$\operatorname{card} J_{N,N} = \sum_{n=0}^{\log_2 N} \operatorname{card} \{2^n J_{N/2^n}\} = \sum_{n=0}^{\log_2 N} 1{,}5\, N/2^n = 3N - 2.$$

Далее очевидно, что если $(p, s) \in 2^n J_{N/2^n}$ для некоторого $n \in [0, \log_2 N]$, то мощность соответствующего множества $T'_{p,s}$ равна $N/2^{n+1}$. Поэтому в оптимальном покрытии (14), объединяющем $3N - 2$ различных множеств (10), $3N/2$ из них содержат по $N/2$ элементов каждый, следующие $3N/4$ содержат по $N/4$ таких элементов и т. д. Отсюда следует, что для определения полного спектра двумерного сигнала размерами $N \times N$ для степеней двойки N достаточно выполнить $3N/2$ одномерных $N/2$-точечных ДПФ, $3N/4$ $N/4$-точечных ДПФ и т. д.

Действительно, пусть произвольный (p, s) из $J_{N,N}$ принадлежит множеству $2^n J_{N/2^n}$ для некоторого $n \in [0, \log_2 N]$. В силу определений (3) — (5) очевидно, что в соответствующем векторе $\overline{G}_{p,s}$ составляющие его с номерами, не кратными числу 2^n, равны нулю. Поэтому такому вектору можно однозначно сопоставить сжатый $N/2^{n+1}$-мерный вектор $\overline{G}^n_{p,s} = (g_{p,s,1}, g_{p,s,2}, \ldots, g_{p,s,N/2^{n+1}})$, в котором составляющие $g_{p,s,t} = f'_{p,s} 2^n t W^{-t}_{N/2^n}$ для всех $t = 1 \div N/2^{n+1}$. При этом, для произвольного $m = 1 \div N/2^{n+1}$ имеет место очевидное равенство в (8)

$$\sum_{t=1}^{N/2} (f'_{p,s,t} W^{-t}) W^{mt}_{N/2} = \sum_{t=1}^{N/2^{n+1}} g_{p,s,t} W^{mt}_{N/2^{n+1}}. \tag{18}$$

Поэтому $N/2$ — точечное ДПФ вектора $\overline{G}_{p,s}$ для произвольного отсчета $(p, s) \in 2^n J_{N/2^n}$ эквивалентно выполнению $N/2^{n+1}$-точечного ДПФ над соответствующим вектором $\overline{G}^n_{p,s}$, где $n \in [0, \log_2 N]$. Это и доказывает приведенное выше утверждение об эквивалентности вычисления полного двумерного ДПФ отдельными выполнениями $3N/2$ $N/2$-точечных ДПФ, $3N/4$ $N/4$-точечных ДПФ и т. д.

Отметим здесь, что описанный алгоритм вычисления двумерного ДПФ существенно отличается и от хорошо известного редуцированного алгоритма [2], выполняемого с помощью сложных полиномиальных преобразований. Действительно, для N равного степени двойки, в таком алгоритме вычисления $N \times N$-точечного ДПФ осуществляется с помощью полиномиальных преобразований и посредством не только $3N/2$ редуцированных N-точечных ДПФ, но еще и $N/2 \times N/2$-точечного ДПФ, которое в свою очередь также аналогичным образом [2] вычисляется посредством $3N/4$ редуцированных $N/2$-точечных ДПФ и одного

$N/4 \times N/4$-точечного ДПФ и так далее. Поэтому предлагаемый алгоритм вычисления двумерного ДПФ эффективнее, очевидно, и указанного редуцированного алгоритма.

Посчитаем объем $v_{N,N}$ нетривиальных операций умножения на поворачиваемые экспоненциальные множители W^t, необходимый для выполнения предлагаемого алгоритма вычисления $N \times N$-точечного ДПФ. Из полученных для этого формул вычисления (8), (18) следует, очевидно, что

$$v_{N,N} = \sum_{n=1}^{\log_2 N-2} 3N/2^n (v_{N/2^n} + N/2^n - 2), \tag{19}$$

где для каждой степени двойки M, v_M обозначает объем указанных операций умножения для M-точечного ДПФ, а суммирование осуществляется до $\log_2 N-2$, так как очевидно, что следующие 4,2-точечные преобразования операций умножения не требуют.

Из полученной формулы (19) нетрудно получить, что

$$v_{N,N} = 3N \sum_{n=1}^{\log_2 N-2} 1/2^n v_{N/2^n} + N^2 - 6N + 8. \tag{20}$$

При этом такая формула оценки объема указанных операций умножения, необходимых для вычисления дискретного двумерного преобразования Фурье с помощью одномерных, в силу приведенного выше следствия доказанной леммы, является точной, т. е. не улучшаемой.

Оценивая все v_M в (20) с помощью оценок для одномерных быстрых алгоритмов преобразования Фурье (БПФ), например, с прореживанием по времени [3], для которых они равны $M/2(\log_2 M-2)+1$, нетрудно получить, что

$$v_{N,N} \leqslant N^2/2 \left(\log_2 N - 3 \sum_{n=1}^{\log_2 N-3} n/4^n\right) - 3N - 16(2\log_2 N - 3) \approx$$

$$\approx N^2/2(\log_2 N - 3/2) - 3N - 16(2\log_2 N - 3) \tag{21}$$

для достаточно больших значений N.

Чтобы получить точную минимальную оценку числа умножений, т. е. $v_{N,N}$, очевидно, в (20) нужно подставить точные оценки v_M для всех степеней двойки M от N до 8. Не останавливаясь на одномерном случае, отметим, что все вышеприведенные рассуждения о спаренном тензорном представлении спектра легко переносятся и на случай одномерного сигнала, причем точные оценки указанных операций умножения v_M также легко находятся аналогично (20) и равны для каждой степени двойки $M \geqslant 8$

$$v_M = M/2(\log_2 M - 3) + 2. \tag{22}$$

Поэтому, подставляя такие оценки (22) в (20), получим

$$v_{N,N} = N^2/2 \left(\log_2 N - 1 - 3 \sum_{n=1}^{\log_2 N-2} n/4^n\right) - 8(\log_2 N - 1) \approx$$

$$\approx N^2/2(\log_2 N - 5/2) - 8(\log_2 N - 1) \tag{23}$$

для больших значений N.

Таким образом, с помощью введенного выше спаренного тензорного представления фурье-спектра двумерного сигнала, получена точная оценка (23) для операций комплексных умножений на нетривиальные поворачиваемые множители, достаточных для вычисления ДПФ.

Далее, несмотря на то, что размеры двумерного сигнала предполагались совпадающими и равными степеням двойки, спаренный тен-

зорный способ вычисления спектра легко распространить и на более общий случай, когда размеры сигнала равны произвольным четным числам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян А. М. Алгоритм вычисления двумерного преобразования Фурье.— Изв. вузов МВ и ССО СССР. Радиоэлектроника, 1984, т. 27, № 10, с. 52—57.

2. Нуссбаумер Г. Вычисление двумерных свёрток и дискретных преобразований Фурье.— В кн.: Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Пер. с англ.— М. : Радио и связь, 1984, с. 43—88.

3. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов / Пер. с англ.— М. : Сов. радио, 1973, с. 367.

Поступила в редакцию 03.12.85

УДК 621.391.1

КОМПЕНСАЦИОННО-КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЖЕКТОРОВ

Ю. Н. ПАРШИН, Е. В. ПЕРЕСЫПКИН

Проведен анализ квазиоптимального устройства обработки, состоящего из нелинейного режектора и коррелятора, при наблюдении полезного сигнала в присутствии фазомодулированной помехи, внешнего шума, а также внутрисистемного шума. Получено выходное отношение сигнал/шум при различных опорных сигналах коррелятора, один из которых позволяет реализовать согласованную обработку, а другой учитывает искажения полезного сигнала в нелинейном режекторе.

Широко известной достаточной статистикой для многих задач обнаружения и измерения параметров сигналов является отношение правдоподобия или его логарифм. Среди различных представлений алгоритма вычисления логарифма отношения правдоподобия [1] наиболее конструктивным представляется оценочно-корреляционно-компенсационный алгоритм [2]. В соответствии с ним оптимальная обработка сигнала состоит в компенсации (режекции) помехи ее среднеквадратичной оценкой, полученной по наблюдаемой реализации, и последующей корреляционной обработке. При этом опорный сигнал коррелятора корректируется на величину искажений полезного входного сигнала в компенсаторе помехи. Данный подход оказывается плодотворным и при разработке квазиоптимальных устройств.

В работе [3] проведен анализ компенсационно-корреляционной обработки при заданной квазиоптимальной структуре режектора и согласованной корреляционной обработке. Рассмотрим влияние опорного сигнала коррелятора на эффективность компенсационно-корреляционной обработки при действии помехи, внешних и внутрисистемных шумов.

Пусть наблюдаемый процесс на входе режектора $y_t=\theta s_t+\eta_t+\nu_t$, где $s_t=A_s\cos(\omega_0 t+\varphi_{st})$ — полезный сигнал длительностью T, который считается полностью известным, $\eta_t=A_\eta\cos(\omega_0 t+\varphi_{\eta t}+\varphi_0)$ — помеха, представляющая собой квазигармоническое колебание со случайной начальной фазой φ_0, распределенной равномерно; $\nu_t=A_{\nu t}\cos(\omega_0 t+\varphi_{\nu t})$ — узкополосный гауссовский шум; σ_ν^2 — дисперсия шума; ω_0 — центральная частота; $\theta=\overline{0,1}$ — параметр обнаружения. Сигнал s_t и помеха η_t имеют постоянные амплитуды, величины которых заданы параметрами

$$\mu=A_s/A_\eta\ll 1 \text{ и } \varkappa=\sigma_\nu/A_\eta\ll 1, \tag{1}$$